

Лапласовский рост без поверхностного натяжения при фильтрационном горении: Аналитическое полюсное решение

Купервассер О.Ю.

ООО «Транзист Видео», участник Сколково, 119296, Россия

Институт им. Вейцмана, Реховот 76100, Израиль;

olegkup@yahoo.com

Фильтрационное горение описывается Лапласовским ростом без поверхностного натяжения. У этих уравнений имеются замечательные аналитические решения, которые заменяют их комплексные интегро-дифференциальные уравнения движения на простые дифференциальные уравнения движения полюсов в плоскости комплексной переменной. Главная проблема такого решения – это имеющиеся сингулярности, возникающие за конечное время. Во избежание таких сингулярностей обычно применяется поверхностное натяжение, отличное от нуля. Однако такого ненулевого поверхностного натяжения не существует в фильтрационном горении, что разрушает аналитические решения. Тем не менее, имеется более изящный способ решения этой проблемы. Во-первых, мы можем ввести в систему некоторый незначительный полюсный шум. Во-вторых, для регуляризации проблемы мы отбросим все новые полюса, которые могут создать сингулярности, возникающие за конечное время. Можно строго доказать, что асимптотическим решением для такой системы будет единственный «палец». Более того, качественное рассмотрение показывает, что палец с шириной канала $1/2$ является статистически стабильным. Соответственно, все свойства такого решения являются совершенно такими же, что и свойства решения с ненулевым поверхностным натяжением при числовом шуме. Решение проблемы Сафмана-Тейлора без поверхностного натяжения похоже на решение для уравнения ячеистого пламени в случае сгорания смесей газов.

1 Введение

Проблема образования структуры является сегодня одной из наиболее быстроразвивающихся ветвей нелинейной теории [1-18].

Уравнение двумерного Лапласовского роста описывает широкий круг физических задач, например - фильтрационное горение в пористой среде; вытеснение холодной жидкости (газа) в Хеле-Шоу канале такой же нагретой жидкостью (газом); происходящее в канале затвердевание жидкости в твердое тело и вытеснение им этой жидкости [2-4].

Численные решения для вытеснения вязкой жидкости менее вязкой жидкостью, также как эксперименты по вытеснению из Хеле-Шоу ячеек конечной длины для перемешивающихся жидкостей иллюстрируют большое разнообразие картин, зависящих

от отношения вязкостей и числа Пекле [19-21]. Типичные картины для больших чисел Пекле представлены на Рис. 1.

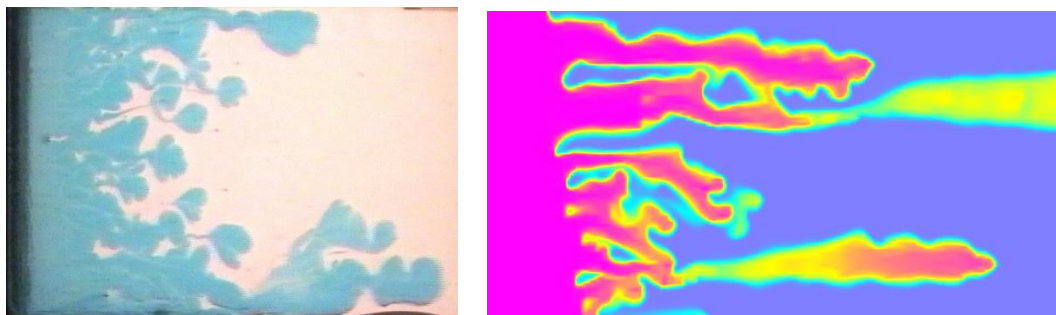


Рис.1. Экспериментальное (а) и численное (б) распределение концентраций при вытеснении вязкой жидкости менее вязкой жидкостью из Хеле-Шоу ячейки. Жидкости являются перемешивающимися, направление потока слева направо.

Уравнение двумерного Лапласовского роста допускает красивые аналитические решения ([22] и ссылки в ней). Наиболее физически значимые решения – это решение в форме логарифмических полюсов («Тем не менее, значительный подкласс чисто логарифмических решений хорошо определен для всех положительных времен и описывает не сингулярную динамику поверхности при нулевом поверхностном натяжении» [22]). Однако подобное уравнение может приводить к возникновению сингулярностей за конечное время. Чтобы их предотвратить и регуляризовать проблему, в уравнение вводят член с поверхностным натяжением.

К сожалению, при этом аналитическое решение в форме полюсов становится невозможным. Кроме того, поверхностным натяжением объясняют появление асимптотического решения в виде пальца с шириной, равной половине ширине канала, наблюдающегося также в экспериментах.

В данной работе приводится математический механизм регуляризации, позволяющий избежать сингулярностей, получить желаемую асимптотику в виде пальца с шириной, равной половине ширине канала, сохранив при этом аналитическое решение в форме полюсов.

Сохранение аналитического характера решения крайне важно – оно позволит легко проанализировать решения уравнения двумерного Лапласовского роста и объяснить качественно или количественно его поведение.

Автор искренне надеется, что эта работа сыграет ту же роль для уравнения двумерного Лапласовского роста, что и работа [17] для теории горения смеси газов. Приведенное в [17] аналитическое решение и его асимптотика дали толчок к развитию теории горения смеси газов и позволило объяснить качественно или количественно поведение фронта горения газов [12-16, 18].

Маковский, Алдушин [2-4] рассмотрели плоские, однородно распространяющиеся волны горения, приводимые в движение фильтрацией газа, содержащего окислитель, который реагирует со сгораемой пористой средой, через которую перемещается. Обычно

эти волны оказывались нестабильными относительно гидродинамических возмущений, для направленного как вперед (попутный поток), так и назад (обратный поток) фильтрационного горения (ФГ), в котором направление потока газа будет соответственно тем же, что и направление распространения волны горения, либо противоположным ему.

Основной механизм, приводящий к нестабильности – это уменьшение сопротивления потоку в районе продуктов горения, что объясняется увеличением пористости в данном районе. Другой дестабилизирующий эффект в направленном вперед ФГ – это образование газообразных продуктов в ходе реакции. В обратном ФГ этот эффект является стабилизирующим. В случае нестабильности плоского фронта возникает альтернативный режим распространения в форме «пальца», который распространяется с постоянной скоростью. Область «пальца», заполненная продуктами горения, отделяется от участка без горения фронтом, в котором происходят химические реакции и передача тепла и массы.

В работах Маковского, Алдушина [2-4] было продемонстрировано, что решение проблемы фильтрационного горения с помощью «пальца» может быть охарактеризовано как решение проблемы Сафмана-Тейлора, которая изначально была сформулирована для описания вытеснения одной жидкости другой, имеющей меньшую вязкость, в пористой среде или в конфигурации Хеле-Шоу. Известно, что у проблемы ST имеется целое семейство решений в виде «пальца», при этом каждый «палец» характеризуется собственной скоростью и каждый занимает разную часть пористого канала, через который он распространяется. Скалярное поле, управляющее эволюцией поверхности раздела, является гармонической функцией. Поэтому, естественно назвать процесс *Лапласовским ростом*.

Математическая проблема Лапласовского роста без поверхностного натяжения имеет семейство точных аналитических решений, выражающиеся через логарифмические полюса в плоскости комплексной переменной.

Главная проблема такого решения – это имеющиеся сингулярности, возникающие за конечное время. Во избежание таких сингулярностей обычно применяется поверхностное натяжение, отличное от нуля ([5- 9]). Поверхностное натяжение также дает в результате четко определенное асимптотическое решение: единственный «палец» с шириной, равной половине ширины канала. Для регуляризации здесь могут использоваться также и другие методы (см. [10, 11] и ссылки в них).

Решения проблемы Сафмана-Тейлора без поверхностного натяжения аналогичны решению уравнения горения в случае сгорания смеси газов и образования ячеистой структуры пламени [12-18]. В самом деле, в обоих случаях решения могут быть преобразованы в набор обычных дифференциальных уравнений. Этот набор описывает движение полюсов в плоскости комплексной переменной.

Следует особо подчеркнуть, что фильтрационное горение и горение в смеси газов описываются разной физикой; уравнения двухмерного Лапласовского роста и уравнения Михельсона-Сивашинского описывают совершенно разную математику. Более того, если для уравнения Михельсона-Сивашинского полюса входят в тригонометрические функции, для уравнения двухмерного Лапласовского роста они входят в логарифмические функции. Аналогия тут не поверхностная, а глубокая – несмотря на различие в физике и математике, сложные интегро-дифференциальные уравнения имеют простое аналитическое

решение в виде полюсов и, более того, даже поведение этих полюсов схоже. Однако, ненулевое поверхностное натяжение для проблемы Сафмана-Тейлора делает невозможным это замечательное аналитическое решение.

Другая проблема, упомянутая и обсужденная в работах проф. Маковского и д-ра А.П. Алдушина ([2-4]), заключается в том, что для фильтрационного горения в пористой среде поверхностное натяжение не может быть введено для математической проблемы, рассматриваемой Сафманом и Тейлором. Здесь зона химической реакции, диффузии тепла и массы сжимается до просто поверхности раздела, которая отделяет участок без горения от участка, где горения происходит. В данной ситуации нет скачков давления на поверхности раздела, поэтому здесь нельзя ввести поверхностное натяжение [2-4]. То есть, мы должны найти решение без ввода поверхностного натяжения. Далее проф. Маковский и д-р А.П. Алдушин ([2-4]) пишут, что однако разумно ожидать, что эффекты, даваемые поверхностным натяжением, могут быть получены другими физическими возмущениями, релевантными конкретной рассматриваемой специфической проблеме. Например, в проблеме горения, как возмущение может быть рассмотрен эффект диффузии [2-4].

В работах проф. Маковского и д-ра А.П. Алдушина ([3-4]) были предложены критерии приводящие к выбору нужного семейства решений (это единственный «палец» с шириной, равной половине ширины канала). Эти критерии основываются на рассмотрении самой проблемы Сафмана-Тейлора, а не ее модификаций, полученных, например, путем добавления поверхностного натяжения к модели и далее принятия исчезновения поверхностного натяжения в пределе.

К сожалению, из работ [2-4] не понятно, почему Лапласовский рост без поверхностного натяжения (а именно, какой именно его *математический* механизм регуляризации) приводит к удовлетворению найденных критериев и, соответственно, дает известное асимптотическое решение (единственный «палец» с шириной, равной половине ширины канала). Найденные критерии не выведены теоретически из уравнений движения. Не показано, какой именно *математический* механизм регуляризации приводит к этому результату. Эти критерии являются лишь догадкой авторов, основанной на знании верной асимптотики из эксперимента.

Мы в данной статье получаем верное асимптотическое решение и предлагаем *математический* механизм регуляризации, не основанный на введении поверхностного натяжения. Во-первых, мы можем ввести в систему небольшой шум. (Он может рассматриваться как поток полюсов из бесконечности). Во-вторых, для регуляризации проблемы мы будем отбрасывать все новые полюса, которые могут дать сингулярности, возникающие за конечное время. Можно строго доказать, что асимптотическим решением для такой проблемы будет единственный «палец». Более того, качественное рассмотрение показывает, что палец с величиной ширины канала $1/2$ является статистически стабильным. Соответственно, все свойства такого решения будут полностью такими же, что и для решения с ненулевым поверхностным натяжением при численном шуме.

Остальная часть работы построена следующим образом. В следующем Разделе 2 описывается формирование асимптотического единственного «пальца» Сафмана-Тейлора без поверхностного натяжения. Затем мы представляем аргументы по поводу формирования «пальца» Сафмана-Тейлора с шириной, равной половине ширины канала (Раздел 3). В заключительном разделе (Раздел 4) подводятся итоги и делаются выводы.

2 Формирование асимптотического единственного «пальца» Сафмана-Тейлора без поверхностного натяжения

В отсутствие поверхностного натяжения, которое воздействует в сторону стабилизации коротковолновых возмущений поверхности раздела, проблема двумерного (2D) Лапласовского роста описывается следующим образом:

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2)u = 0.$$

(1)

$$u|_{\Gamma(t)} = 0, \partial_n u|_{\Sigma} = 1.$$

(2)

$$v_n = \partial_n u|_{\Gamma(t)}.$$

(3)

Здесь $u(x, y; t)$ - скалярное поле, $\Gamma(t)$ - движущаяся поверхность раздела, Σ - неподвижная внешняя граница, ∂_n - компонент градиента, нормальный по отношению к границе (т.е. производная по нормали), и v_n - проекция скорости фронта на нормаль к границе.

Введем физические граничные условия «без потока». Это означает отсутствие потока через боковые стенки канала. Для этого требуется, чтобы движущаяся поверхность раздела была ортогональна стенкам канала. Тем не менее, в отличие от случая с периодическими граничными условиями, две граничные точки движущейся поверхности на стенках канала не обязательно должны иметь одинаковую координату по вертикали. Однако, эту задачу можно свести к периодической, где период равен удвоенной ширине канала. Но только половина этой периодической полосы может рассматриваться как физический канал, в то время как вторая половина является нефизическим зеркальным образом.

Далее мы вводим конформное отображение с временной зависимостью f , отображающее нижнюю полуплоскость «математической» плоскости, $\xi \equiv \zeta + i\eta$ на область физической плоскости, $z \equiv x + iy$, где Лапласовское уравнение (1) определено как $\xi \xrightarrow{f} z$. Также мы выдвигаем требование, чтобы $f(\xi, t) \approx \xi$ для $\xi \rightarrow \zeta - i\infty$. Соответственно, функция $z = f(\zeta, t)$ описывает движущуюся поверхность раздела. Из уравнений (1), (2), (3) для функции $f(\zeta, t)$ мы получаем *Уравнение Лапласовского роста*

$$\text{Im}\left(\frac{\partial f(\zeta, t)}{\partial \zeta} \overline{\frac{\partial f(\zeta, t)}{\partial t}}\right) = 1|_{\zeta=\zeta-i0}, f_\zeta|_{\zeta-i\infty} = 1.$$

(4)

Давайте искать решение Ур. (4) в следующей форме:

$$f(\xi, t) = \lambda \xi - i\tau(t) - i \sum_{l=1}^N \alpha_l \log(e^{i\xi} - e^{i\xi_l(t)}),$$

(5)

$$z(\zeta, t) = f(\zeta, t) = \lambda \zeta - i\tau(t) - i \sum_{l=1}^N \alpha_l \log(e^{i\zeta} - e^{i\xi_l(t)}),$$

(6)

$$\alpha = \sum_{l=1}^N \alpha_l = 1 - \lambda,$$

(7)

где $\tau(t)$ - некоторая действительная функция времени, α_l - комплексная константа, $\xi_l = \zeta_l + i\eta_l$ обозначает положение полюса с номером l и N - число полюсов.

Для нашего граничного условия «без потока» мы должны добавить условие, что для каждого полюса $\xi_l = \zeta_l + i\eta_l$ с α_l имеется полюс $\bar{\xi}_l = -\zeta_l + i\eta_l$ с $\bar{\alpha}_l$.

Соответственно, из этого условия и ур. (7) мы можем заключить, что λ является действительной константой.

Ниже мы докажем, что необходимым условием для отсутствия сингулярности, возникающей за конечное время, является следующее условие

$$-1 < \lambda < 1,$$

(8)

Также для функции $F(i\xi, t) = if(\xi, t)$ в случае граничного условия «без потока»:

$$\overline{F(i\xi, t)} = F(i\bar{\xi}, t)$$

(9)

Мы хотим доказать, что конечным состоянием процесса будет только один «палец», при условии, что в ходе эволюций полюсного решения не появляются сингулярности, возникающие за конечное время.

2.1 Асимптотическое поведение полюсов в математической плоскости

Приведенный здесь вывод аналогичен [23], но здесь мы также используем граничные условия «непротекания» (по аналогии с [24]). Главная цель этой главы – исследовать асимптотическое поведение полюсов в математической плоскости. Мы хотим продемонстрировать, что для времени $t \rightarrow \infty$, все полюса в случае периодических граничных условий сливаются в один полюс или смещаются к двум граничным точкам поверхности раздела на стенках канала в случае граничных условий «непротекания». Уравнением для поверхности раздела будет

$$f(\xi, t) = \lambda \xi - i\tau(t) - i \sum_{l=1}^N \alpha_l \log(e^{i\xi} - e^{i\xi_l(t)}),$$

$$\sum_{l=1}^N \alpha_l = 1 - \lambda, -1 < \lambda < 1.$$

(10)

Путем подстановки ур. (10) в Уравнение Лапласовского роста

$$\text{Im}\left(\frac{\partial f(\xi, t)}{\partial \xi} \frac{\partial f(\xi, t)}{\partial t}\right) = 1 \Big|_{\xi=\zeta-i0}$$

(11)

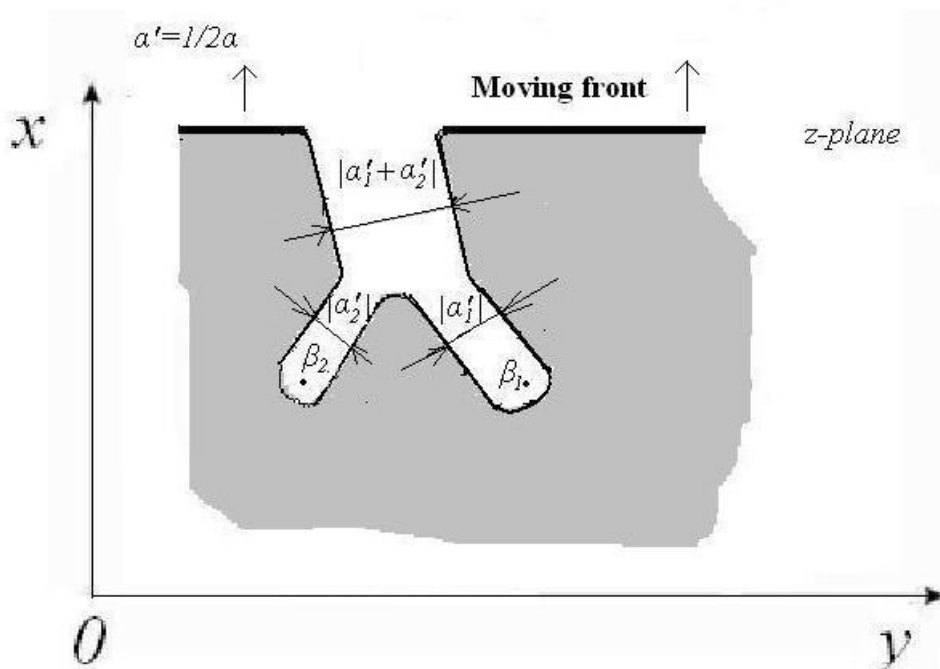


Рис.2: Геометрическая интерпретация комплексных констант движения $\alpha'_k = \frac{1}{2} \alpha_k$ и β_k ;

$k = 1, \dots, N$.

$\alpha' = 1/2\alpha$

мы можем найти уравнения движения для полюсов (Рис. 2):

$$\beta_1 = \tau(t) + (1 - \sum_{k=1}^N \overline{\alpha_k}) \log \frac{1}{a_1} + \sum_{k=1}^N \overline{\alpha_k} \log \left(\frac{1}{a_1} - \overline{a_k} \right) = \text{const}$$

(12)

и

$$\tau = t - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \overline{\alpha_k} \alpha_l \log(1 - \overline{a_k} a_l) + C_0,$$

(13)

где $a_1 = e^{i\xi_1}$, C_0 является константой. Из уравнения (12) мы можем вывести

$$(1-\lambda)\tau - \sum_{l=1}^N \alpha_l \log a_l + \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \overline{\alpha_k} \alpha_l \log(1 - \overline{a_k} a_l) = \text{const}.$$

(14)

Из уравнений (13) и (14) мы получаем

$$\text{Im}\left(\sum_{l=1}^N \alpha_l \log a_l\right) = \text{const}$$

(15)

и

$$t = \left(\frac{1+\lambda}{2}\right)\tau + \frac{1}{2} \text{Re}\left(\sum_{l=1}^N \alpha_l \log a_l\right) + C_1/2,$$

(16)

где C_1 и α_l - константы, $\xi_1(t)$ - положение полюсов, $a_l = e^{i\xi_1(t)}$.

В Приложении А мы докажем из уравнения (13), что $\tau \mapsto \infty$, если $t \mapsto \infty$, при условии, что за конечное время не возникает сингулярности.

Уравнения движения полюса из уравнения (12) будут следующими:

$$\tau + i\overline{\xi_k} + \sum_1 \alpha_1 \log(1 - e^{i(\xi_1 - \overline{\xi_k})}) = \text{const},$$

(17)

или в иной форме:

$$\zeta_k + \sum_1 (\alpha_1'' \log |1 - e^{i(\xi_1 - \overline{\xi_k})}| + \alpha_1' \arg(1 - e^{i(\xi_1 - \overline{\xi_k})})) = \text{const},$$

(18)

$$\tau + \eta_k + \sum_1 (\alpha_1' \log |1 - e^{i(\xi_1 - \overline{\xi_k})}| - \alpha_1'' \arg(1 - e^{i(\xi_1 - \overline{\xi_k})})) = \text{const},$$

(19)

где

$$\xi_1 = \zeta_1 + i\eta_1, \eta_1 > 0.$$

(20)

$$\alpha_l = \alpha_l' + i\alpha_l''.$$

(21)

Выполним следующее преобразование

$$\arg(1 - e^{i(\xi_1 - \overline{\xi_k})}) = \arg([1 - e^{i(\zeta_1 - \zeta_k)} e^{-(\eta_1 + \eta_k)}]) = \arg[1 - a_{lk} e^{i\varphi_{lk}}]$$

(22)

где

$$\varphi_{lk} = \zeta_1 - \zeta_k, a_{lk} = e^{-(\eta_1 + \eta_k)}$$

(23)

Здесь $\arg[1 - a_{lk} e^{i\varphi_{lk}}]$ - однозначная функция φ_{lk} , т.е.

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arg[1 - a_{1k} e^{i\varphi_{1k}}] \leq \frac{\pi}{2}.$$

(24)

Умножим ур. (19) на α_k'' и ур. (18) на α_k' и перенесем их разность в следующее уравнение:

$$\alpha_k' \zeta_k - \alpha_k'' \tau + \sum_{l \neq k} ((\alpha_l'' \alpha_k' - \alpha_k'' \alpha_l') \log |1 - e^{i(\xi_l - \bar{\xi}_k)}| + (\alpha_l' \alpha_k' + \alpha_l'' \alpha_k'')) \arg(1 - e^{i(\xi_l - \bar{\xi}_k)}) = \text{const.}$$

(25)

Мы хотим исследовать асимптотическое поведение полюсов $\tau \mapsto \infty$. В этом уравнении у нас есть расходящиеся члены $\alpha_k'' \tau$. Из ур. (25) это расхождение может компенсировать только члены $\log |1 - e^{i(\xi_l - \bar{\xi}_k)}|$. Необходимое условие для этого - $\eta_k \mapsto 0$ для $\tau \mapsto \infty, 1 \leq k \leq N$.

Можно предположить, что для $t \mapsto \infty$, имеются N' не слившихся групп полюсов ($N' \leq N$) ($\varphi_{lk} \mapsto 0$ для всех членов группы). N' в данный момент произвольно и даже может быть равным N . N_l - это номер полюсов в каждой группе, $1 \leq l \leq N'$.

Для каждой группы путем суммирования уравнений (25) по всем группам полюсов мы получаем

$$\alpha_k^{\text{gr}} \zeta_k^{\text{gr}} - \alpha_k^{\text{gr}''} \tau + \sum_{l \neq k} ((\alpha_l^{\text{gr}''} \alpha_k^{\text{gr}} - \alpha_k^{\text{gr}''} \alpha_l^{\text{gr}}) \log |1 - e^{i(\xi_l^{\text{gr}} - \bar{\xi}_k^{\text{gr}})}| + (\alpha_l^{\text{gr}} \alpha_k^{\text{gr}} + \alpha_l^{\text{gr}''} \alpha_k^{\text{gr}''}) \arg(1 - e^{i(\xi_l^{\text{gr}} - \bar{\xi}_k^{\text{gr}})})) = \text{const.},$$

(26)

где

$$\alpha_l^{\text{gr}''} = \sum_k^{N_l} \alpha_k'',$$

(27)

$$\alpha_l^{\text{gr}} = \sum_k^{N_l} \alpha_k'.$$

(28)

Мы полагаем, что нет слияния групп для $\tau \mapsto \infty$, поэтому мы можем исследовать движение полюсов со следующим допущением:

$$|\zeta_1^{\text{gr}} - \zeta_k^{\text{gr}}| \gg \eta_l^{\text{gr}} + \eta_k^{\text{gr}}, 1 \leq l, k \leq N.$$

(29)

Для $l \neq k$, $\eta_k^{\text{gr}} \mapsto 0$, $\varphi_{lk}^{\text{gr}} = \zeta_1^{\text{gr}} - \zeta_k^{\text{gr}}$ мы получаем

$$\log |1 - e^{i(\xi_l^{\text{gr}} - \bar{\xi}_k^{\text{gr}})}| \approx \log |1 - e^{i(\zeta_1^{\text{gr}} - \zeta_k^{\text{gr}})}| = \log 2 + \frac{1}{2} \log \sin^2 \frac{\varphi_{lk}^{\text{gr}}}{2}$$

(30)

и

$$\arg(1 - e^{i(\zeta_1^{gr} - \overline{\zeta_k^{gr}})}) \approx \arg(1 - e^{i(\zeta_1^{gr} - \zeta_k^{gr})}) = \frac{\varphi_{1k}^{gr}}{2} + \pi n - \frac{\pi}{2}.$$

(31)

Мы выбираем n в ур.(31) таким образом, чтобы ур. (24) удовлетворялось. Подставляя эти результаты в уравнение (26), получаем

$$C_k = \alpha_k^{gr} \zeta_k^{gr} - \alpha_k^{gr} \tau + \sum_{l \neq k} [(\alpha_1^{gr} \alpha_k^{gr} - \alpha_k^{gr} \alpha_1^{gr}) \log |\sin \frac{\varphi_{lk}^{gr}}{2}| + (\alpha_1^{gr} \alpha_k^{gr} + \alpha_1^{gr} \alpha_k^{gr}) \frac{\varphi_{lk}^{gr}}{2}].$$

(32)

2.2 Теорема о слияния полюсов

Из ур. (32) мы можем заключить

- (i) Путем суммирования уравнений (32) по всем группам полюсов (или сразу из ур. (15)) мы получаем

$$\sum_k \alpha_k^{gr} \zeta_k^{gr} = \text{const}.$$

(33)

- (ii) Для $|\varphi_{lk}^{gr}| \mapsto 0, 2\pi$, мы получаем $\log |\sin \frac{\varphi_{lk}^{gr}}{2}| \mapsto \infty$, что означает, что полюса не могут проходить друг через друга;
- (iii) Из (ii) мы заключаем, что $0 < |\varphi_{lk}^{gr}| < 2\pi$
- (iv) Из (i) и (iii) мы видим, что $\zeta_k^{gr} \mapsto \infty$ невозможно;
- (v) В ур. (32) мы должны компенсировать второй расходящийся член. Из (iv) и (iii) мы можем получить это, только если $\alpha_1^{gr} = \sum_k^{N_1} \alpha_k'' = 0$ для всех 1.

Соответственно из ур. (32) получаем

$$\sum_k^{N_1} \alpha_k'' = 0,$$

(34)

$$\dot{\varphi}_{lk}^{gr} = 0,$$

(35)

$$\varphi_{lk}^{gr} \neq 0,$$

(36)

$$\dot{\zeta}_k^{gr} = 0.$$

(37)

Для асимптотического движения полюсов в группе N_m мы получаем из уравнений (34), (35), (36), (37) подставив главные члены в уравнения (16), (17)

$$\tau = \frac{2}{\lambda + 1} t, \quad (38)$$

$$\dot{t} + \sum_1^{N_m} \alpha_1 \frac{\dot{\eta}_k + \dot{\eta}_1 + i(\dot{\zeta}_k - \dot{\zeta}_1)}{\eta_k + \eta_1 + i(\zeta_k - \zeta_1)} = 0. \quad (39)$$

Решение для этих уравнений:

$$\eta_k = \eta_k^0 e^{-\frac{1}{\alpha_m^{gr}} \frac{2}{1+\lambda} t}, \quad (40)$$

$$\varphi_{lk} = \varphi_{lk}^0 e^{-\frac{1}{\alpha_m^{gr}} \frac{2}{1+\lambda} t}, \quad (41)$$

$$\dot{\zeta}_k = 0. \quad (42)$$

Соответственно, мы можем сделать вывод, что для компенсации расходящегося члена нам потребуется

$$\alpha_1^{gr} = \sum_k^{N_l} \alpha_k'' = 0, \quad (43)$$

$$\alpha_1^{gr} (1 + \lambda) > 0 \quad (44)$$

для всех l .

2.3 Конечный результат

Для периодических граничных условий уравнение. (43) верно для всех полюсов, таким образом мы получаем $N' = 1$, $m=1$ и $N_m=N$.

Следовательно, единственное решение будет:

$$\eta_k = \eta_k^0 e^{-\frac{2}{1-\lambda^2} t}, \quad (45)$$

$$\varphi_{lk} = \varphi_{lk}^0 e^{-\frac{2}{1-\lambda^2}t},$$

(46)

$$\dot{\zeta}_k = 0,$$

(47)

$$1 - \lambda^2 > 0.$$

(48)

Для граничных условий непротекания у нас имеются пары полюсов, для которых условие (43) выполняется. Поэтому все эти пары должны сходиться. В силу симметрии проблемы, эти полюса могут сходиться только на границах канала $\zeta = 0, \pm\pi$. Соответственно, мы получаем две группы полюсов на границах $N' = 2$, $m = 1, 2$, $N_1 + N_2 = N$, $\alpha_1^{gr'} + \alpha_2^{gr'} = 1 - \lambda$. (В принципе, возможны вырожденные случаи, когда условие (43) выполняется и для иных групп полюсов при некоторых значениях величин $\alpha_1^{gr'}$. Но такие ситуации крайне маловероятны и редки.)

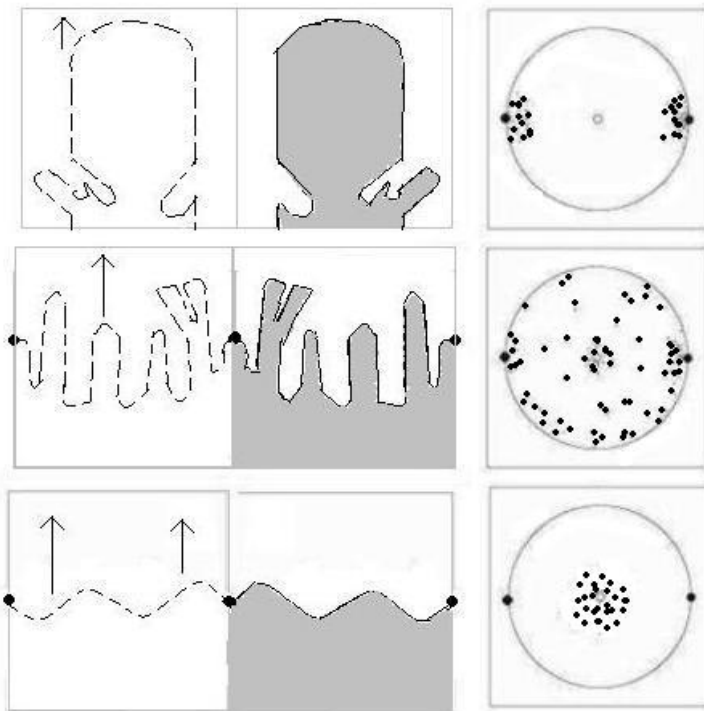


Рис.3: Три последовательных фазы вязкого пальцеобразования в ячейке Хеле-Шоу: начальная (слева), промежуточная (в центре), и асимптотическая (справа). Физическая плоскость z показана на верхних картинках, а на нижних картинках изображается распределение движущихся полюсов $a_k(t)$ в единичном круге $|\omega| < 1$ на математической плоскости ω . Маленький круг в центре обозначает область отталкивания для полюсов,

$\omega = 0$, а Большой круг обозначает аттрактор $\omega = 1$ для полюсов, чья динамика отражена в (12-13).

Далее, мы получаем решение (на двух границах канала, Рис. 3):

$$\eta_k^{(1)} = \eta_k^{(1),0} e^{-\frac{1}{\alpha_1^{gr}} \frac{2}{1+\lambda} t}$$

(49)

$$\varphi_{lk}^{(1)} = \varphi_{lk}^{(1),0} e^{-\frac{1}{\alpha_1^{gr}} \frac{2}{1+\lambda} t},$$

(50)

$$\zeta_k^{(1)} = 0;$$

(51)

$$\eta_k^{(2)} = \eta_k^{(2),0} e^{-\frac{1}{\alpha_2^{gr}} \frac{2}{1+\lambda} t},$$

(52)

$$\varphi_{lk}^{(2)} = \varphi_{lk}^{(2),0} e^{-\frac{1}{\alpha_2^{gr}} \frac{2}{1+\lambda} t},$$

(53)

$$\zeta_k^{(2)} = \pm \pi;$$

(54)

$$\alpha_1^{gr} (1 + \lambda) > 0,$$

(55)

$$\alpha_2^{gr} (1 + \lambda) > 0.$$

(56)

Путем суммирования уравнений (55) и (56) и применив ур. (7), получаем:

$$(1 - \lambda)(1 + \lambda) = 1 - \lambda^2 > 0.$$

(57)

Это позволяет непосредственно получить ранее сформулированное условие (8) для λ . $(\lambda + 1)/2 = 1 - \alpha/2$ имеет явно выраженный физический смысл. Это часть канала, занятая движущейся жидкостью. Мы видим, что в отсутствие сингулярности, возникающей за конечное время, и при $t \rightarrow \infty$, мы получаем единственный «палец» с шириной $(\lambda + 1)/2$.

3 Формирование пальца Сафмана-Тейлора с шириной, равной половине ширины канала

Случай Лапласовского роста в канале без поверхностного натяжения был детально рассмотрен Минеевым-Вайнштейном и Доусоном [25]. В этом случае имеется красивое аналитическое решение этой проблемы. Более того, они подразумевали, что все основные

эффекты в случае исчезающе малого поверхностного натяжения можно также получить без поверхностного натяжения. Это позволит применить к исчезающе малому поверхностному натяжению мощные аналитические методы, разработанные для случая без поверхностного натяжения. Однако эта гипотеза не может быть принята без дополнительных допущений.

Первое возражение касается сингулярностей, возникающих за конечное время, для некоторых начальных состояний. Фактически, для того, чтобы преодолеть эту трудность, и был введен в уравнение новый член, описывающий поверхностное натяжение. Появление этого члена с поверхностным натяжением приводит к утрате аналитического решения. Однако регуляризацию можно выполнить гораздо более простым образом – просто отбросить начальные состояния, которые приводят к таким сингулярностям.

Второе возражение дается в работе Сиегеля и Танвира [26]. В ней показано, что при численном моделировании (подтвержденного некоторыми полуаналитическими расчетами с введением «дочерней сингулярности») в случае с любым (даже исчезающе малым) поверхностным натяжением «палец» с любой начальной толщиной в итоге занимает $1/2$ ширины канала за конечное время, не зависящее от величины малого поверхностного натяжения. Аналитическое же решение в случае без поверхностного натяжения дает в результате постоянную толщину «пальца», равную его начальной толщине, который может быть произвольным. Тем не менее, Сиегель и Танвир не принимали во внимание тот простой факт, что числовой шум вносит небольшое возмущение либо в начальное состояние, либо даже в ходе роста «пальца», которое эквивалентно появлению удаленных полюсов, и с учетом этого возмущения аналитическое решение с постоянной толщиной «пальца» будет нестабильным.

Минеев-Вайнштейн [27] показал, что подобные полюсные возмущения могут привести, при определенных начальных состояниях, к расширению ширины пальца до ширины, полученной Сиегелем и Танвиром. Данный позитивный аспект работы [27] был отмечен Саркисяном и Левиным в их Комментариях [28] и в Отклике на их Комментарий Минеевым-Вайнштейном [29]. Подытоживая сказанное, мы можем отметить, что для совпадения результатов решения задач как с поверхностным натяжением, так и без него, необходимо ввести постоянный источник новых удаленных полюсов: это может быть либо внешний шум, либо бесконечное число полюсов в начальном состоянии. Какой из этих методов является предпочтительным – это пока еще открытый вопрос.

Конечно, этот дополнительный шум будет вносить и полюса, приводящие и к решениям, отличным от решения найденного Сиегелем и Танвиром [26]. Но эти решения при наличии шума будут возникать как при наличии поверхностного натяжения, так и без него. Таким образом, введение шума стирает разницу между уравнениями с/без поверхностного натяжения.

В случае распространения фронта пламени было показано [12-16], что внешний шум необходим для объяснения увеличения скорости пламени с увеличением размеров системы: бесконечное число полюсов в начальном состоянии не может дать такой результат. Интересно было бы понять, такова ли ситуация для Лапласовского роста в канале. Один из основных результатов Лапласовского роста в канале с небольшим

поверхностным натяжением – это формирование «пальца» Сафмана-Тейлора с толщиной, равной $1/2$ значениям толщины канала. И чтобы использовать аналитический результат, полученный для нулевого поверхностного натяжения, необходимо доказать, что образование «пальца» с толщиной, равной $1/2$ значениям толщины канала, также имеет место и без поверхностного натяжения.

В нашей совместной с Минеевым-Вайнштейном работе [23] показано, что асимптотическое решение будет в виде «пальца» произвольной толщины. Это верно для любого конечного числа полюсов и при почти всех разрешенных начальных состояниях (разрешенных в том смысле, что они не приводят к сингулярностям, возникающими за конечное время), за исключением небольшого числа некоторых вырожденных начальных состояний. Следует отметить, что решения и асимптотика, которые можно найти в [23] для любого конечного числа полюсов, являются идеализацией. Они, однако, обладают реальным смыслом для любых конечных интервалов времени между появлением новых полюсов. Эти полюса появляются в системе или за счет внешнего шума, или связаны с появлением в системе ранее близких к бесконечности полюсов из начального состояния. Начальное состояние может включать бесконечное число таких полюсов. Теорема, доказанная в [23], может быть применена еще раз для нового текущего конечного набора новых появившихся и старых полюсов, и снова получается асимптотика, которая является опять-таки «пальцем», но уже с возможной новой толщиной, отличной от прежней. Таким образом, введение источника новых полюсов приводит, в результате, к возможному дрейфу толщины «пальца», но не к изменению типа самого решения в виде «пальца».

Нужно отметить, что вместо периодических граничных условий можно ввести более реалистичные граничные условия «непротекания» [24]. Граничные условия «непротекания» - это условия, которые запрещают поток вещества через стенку канала. Граничные условия «непротекания» вносят полезные ограничения на параметры полюсов. Эти условия объясняют почему сумма всех комплексных параметров α_i для полюсов дает действительную величину α для полюсных решений (5) в [27].

Введение граничного условия «непротекания», тем не менее, оставляет в силе все результаты полученные в [23] для случая периодических граничных условий. Более того, граничное условие «непротекания» не вносит при этом ничего принципиально нового. Этот факт обоснован в данной работе ниже. Так, например, в работе [24] была повторно выведена теорема об асимптотике в виде одного «пальца» для граничных условий «непротекания» (См. ссылку 14 in [27] и ссылку 20 (и соответствующий ей текст) в [23]). Но теорема об асимптотике в виде одного «пальца» уже была ранее доказана в работе [23] для периодических граничных условий.

Минеев-Вайнштейн в [27] пытается доказать, что асимптотика для Лапласовского роста в канале с нулевым поверхностным натяжением представляет собой единственный «палец» с толщиной, равной $1/2$ толщины канала. Но это доказательство является ошибочным. На самом деле, Минеев-Вайнштейн использует в [27] некий метод для доказательства и демонстрации неустойчивости по отношению к появлению новых удаленных полюсов «пальца» с толщиной, отличной от $1/2$. Однако, тот же самый метод может быть использован и для доказательства неустойчивости «пальца» с толщиной

равной $\frac{1}{2}$, что подробно обосновывается в Комментариях Касадемунта, Магдалено и Алмгрена [30,31]. Касадемунта и Магдалено пишут, что возмущение решения в виде пальца (тоне, члена $\lambda\zeta$ в конформном отображении $z(\zeta, t)$), рассматриваемое Минеевым-Вайнштейном [27] представляет частный случай более общего возмущения:

$$\lambda\zeta \approx (\lambda - \lambda_0)\zeta - i \sum_{k=1}^N \delta_k \log(e^{i\zeta} - \varepsilon_k),$$

(58)

где ε_k мало, а $\sum_{k=1}^N \delta_k = \lambda_0$.

Возмущение рассматриваемое Минеевым-Вайнштейном в [27] соответствует случаю $\lambda = \lambda_0$:

$$\lambda\zeta \approx -i \sum_{k=1}^N \delta_k \log(e^{i\zeta} - \varepsilon_k),$$

(59)

Палец толщиной $\frac{1}{2}$ соответствует случаю $\mu = 0$. Такой палец будет устойчив к возмущению Минеева-Вайнштейна в [27], но неустойчив к более общему решению Касадемунта и Магдалено в [30]. Это опровергает тезис [27], что решение в виде пальца $\frac{1}{2}$ устойчиво и, соответственно, является асимптотикой всех других неустойчивых решений.

Ответ на это возражение приводится Минеевым-Вайнштейном в Отклике [32]. Он показывает, что возмущение Касадемунта и Магдалено легко преобразуется к виду возмущения Минеева-Вайнштейна добавлением полюса, равного нулю. Отсюда Минеев-Вайнштейн делает два вывода:

- 1) Возмущение Касадемунта и Магдалено неустойчиво. Действительно, для доказательства неустойчивости достаточно показать неустойчивость по отношению к хотя бы одному возмущению. Таким возмущением является добавочный полюс. Поскольку возмущение Касадемунта и Магдалено неустойчиво и переходит в возмущение Минеева-Вайнштейна, делается вывод, что его не имеет смысл использовать.
- 2) Возмущение Касадемунта и Магдалено является лишь «узким» подмножеством возмущения Минеева-Вайнштейна для случая добавочного полюса в нуле. Отсюда делается вывод, что возмущение Касадемунта и Магдалено «много реже встречается», чем возмущение Минеева-Вайнштейна. Поэтому возмущение Касадемунта и Магдалено не имеет смысл использовать.

Первое из возражений парадоксальным образом работает скорее против аргументов самого Минеева-Вайнштейна. Действительно, если «для доказательства неустойчивости достаточно показать неустойчивость по отношению к хотя бы одному возмущению», то неустойчивости пальца $\frac{1}{2}$ по отношению к возмущению Касадемунта и Магдалено вполне достаточно для доказательства неустойчивости пальца $\frac{1}{2}$. Соответственно, он не может быть асимптотикой.

Второе возражение содержит простую математическую ошибку. Действительно, для бесконечных множеств подмножество может быть равным самому множеству. Так квадраты натуральных чисел составляют лишь подмножество натуральных чисел. Но между обоими множествами существует очевидное взаимно-однозначное соответствие. В

данном случае каждому возмущению Минеева-Вайнштейна, приводящему к пальцу $1/2$:

$$\lambda\zeta \approx -i \sum_{k=1}^N \delta_k \log(e^{i\zeta} - \varepsilon_k),$$

(60)

можно сопоставить возмущение Касадемунта и Магдалено:

$$0\zeta \approx (0 - (-\lambda))\zeta - i \sum_{k=1}^N (-\delta_k) \log(e^{i\zeta} - \varepsilon_k),$$

(61)

возвращающее толщину пальца от $1/2$ к исходному значению. Добавим в подтверждение выше сказанного, что в нашей совместной работе с Минеевым-Вайнштейном [23] было показано, что для конечного числа полюсов «палец» любой толщины возможен в качестве асимптотического решения. Однако существует фактор, который может разрушать описанное выше взаимно-однозначное соответствие между возмущениями Минеева-Вайнштейна, приводящему к пальцу $1/2$, и возмущениями Касадемунта и Магдалено, возвращающее толщину пальца от $1/2$ к исходному. Дело в том, что часть этих возмущений будут приводить к сингулярности, возникающей за конечное время, вместо асимптотики в виде пальца. Если подобные сингулярности чаще встречаются для возмущений Касадемунта и Магдалено, возвращающих толщину пальца от $1/2$ к исходной, чем для соответствующих возмущений Минеева-Вайнштейна, приводящих к пальцу $1/2$, то это приводит к выделенной роли пальца толщиной $1/2$. Именно такую ситуацию мы и предполагаем ниже (см. Рис. 4)

Тем не менее, это не означает, что привилегированную роль «пальца» толщиной $1/2$ нельзя доказать в случае отсутствия поверхностного натяжения; это означает только то, что такое доказательство не приведено в [27]. Попробуем привести эти правильные аргументы здесь. Общее полюсное решение (5) в работе [27] характеризуется действительным параметром α который является суммой комплексных параметров α_i для полюсов. Толщина асимптотического пальца – это простая функция α . А именно, его толщина составляет $1 - \alpha/2$ от ширины канала. Величина $\alpha = 1$ соответствует толщине $1/2$. Толщина «пальца» должна быть между 0 и 1. Соответственно, возможная величина α находится в интервале между 0 и 2: ($0 < \alpha < 2$). Величина $\alpha = 1$, соответствующая ширине пальца $1/2$, находится точно по середине этого интервала. Что происходит с вполне возможными начальными состояниями полюсов, когда α лежит вне пределов от 0 до 2? Они «не допустимы» из-за описанных выше сингулярностей, возникающих за конечное время [23]. Также, и часть решений для α , лежащего в рамках интервала $0 < \alpha < 2$, приводит к сингулярностям.

Нахождение точных необходимых и достаточных условия, определяющих, приводит то или иное начальное состояние полюсов к сингулярности, все еще является открытой проблемой. Назовем начальные состояния с конечным числом полюсов, приводящие к сингулярности, «недопустимыми». Каждому α соответствует некий процент «недопустимых» начальных состояний от всего числа возможных полюсных

начальных состояний с конечным числом полюсов. Каков этот процент для различных α в интервале $0 < \alpha < 2$?

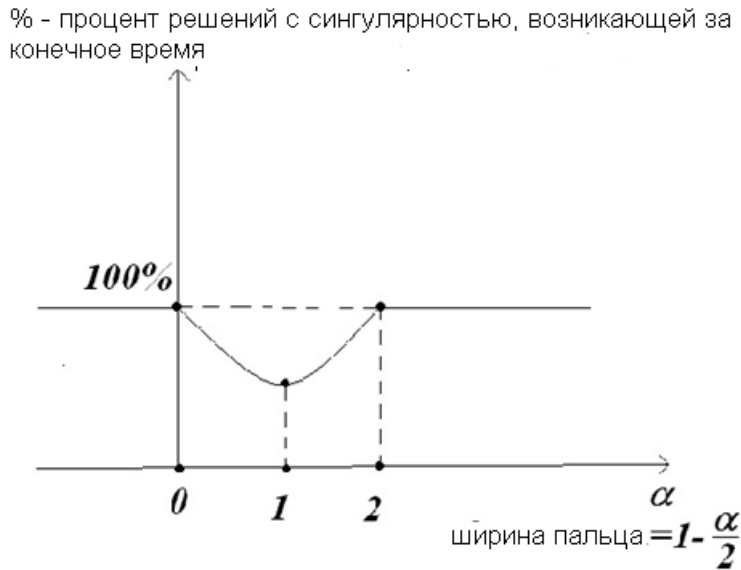


Рис.4: Рассматриваются решения с конечным числом полюсов. На графике показан процент сингулярных решений от общего числа решений как функция от α . Максимальная величина функции равна 100 процентам и соответствует $\alpha \leq 0$ или $\alpha \geq 2$. Минимальная величина функции находится в средней точке $\alpha = 1$, между $\alpha = 0$ (ширина пальца равна 1) и $\alpha = 2$ (ширина пальца равна 0). Таким образом, минимуму соответствует $\alpha = 1$ и ширина пальца равная $1/2$. В общем случае, ширина пальца составляет $1 - \alpha/2$. Здесь за 1 принимается ширина какнала.

Ответ изображен на Рис. 4. Из соображений непрерывности и симметрии относительно $\alpha = 1$ (соответствует толщине пальца $1/2$) можно заключить, что это распределение имеет минимум в точке $\alpha = 1$. Величина $\alpha = 1$ является равноудаленной от обеих границ интервала $0 < \alpha < 2$. Процент «недопустимых» начальных состояний увеличивается по мере приближения к границам $\alpha = 2$ или 0, и достигает 100 процентов от всех полюсных решений за пределами этих границ. Таким образом, толщина $1/2$ является наиболее вероятной, так как для этой величины процент "недопустимых" (т.е. приводящих к сингулярности) начальных состояний достигает минимума.

Появление новых полюсов из шума приводит к дрейфу толщины пальца, однако эти колебания толщины происходят в окрестности наиболее вероятного среднего значения, равного $1/2$. Подобный результат получается и в случае пальца Сафмана-Тейлора с очень малым поверхностным натяжением при наличии некоторого внешнего шума.

Сформулируем кратко наши выводы. Для детального рассмотрения устойчивости решения необходимо явным образом рассматривать шум, который можно представить, как поток полюсов из нуля. Если такого шума явно нет в компьютерной задаче, его заменяет численный шум, связанный с конечной точностью вычислений. При наличии

такого шума можно рассматривать не асимптотическую, а стохастическую устойчивость пальца $\frac{1}{2}$. Она возникает при регуляризации решения отбрасыванием полюсов из шума, могущих приводить к сингулярности за конечное время. При таком отбрасывании оказывается, что для пальца $\frac{1}{2}$ вероятность появления полюсов уменьшающих или увеличивающих его толщину одинакова. Для пальца же с толщиной отличной от $\frac{1}{2}$ появление полюсов, сдвигающих его толщину к $\frac{1}{2}$ более вероятно.

Интересно с этой точки зрения рассмотреть результаты Кесслера и Левине [33]. Там рассматривается случай асимметричного поверхностного натяжения, стремящегося к нулю. Показано, что для очень малого поверхностного натяжения асимптотой является не палец $1/2$, а случайный шум. Отсюда делается вывод о бессмысленности анализа решения в виде пальца $1/2$ для случая поверхностного натяжения стремящегося к нулю. Однако авторы делают ту же ошибку, что и Сиегель и Танвир в [26]. Необходимо сравнивать решения с/без поверхностного натяжения, вводя не только малое поверхностное натяжение, но и не нулевой шум (роль которого при вычислениях может играть и численный шум). Для малого поверхностного натяжения шум, при достаточной величине, может приводить сразу к появлению новой сингулярности, до того или сразу после того как прежняя уже сглажена малым поверхностным натяжением. Это и приводит к описанному в статье случайному решению [34]. Т.е. для получения асимптотики в виде пальца $\frac{1}{2}$ нужно не только малое поверхностное натяжение, но и малый шум, что не учтено в [33].

Нужно отметить, что сформулированные аргументы являются лишь качественными, также необходимы и более строгие доказательства. Первый шаг в этом направлении сделан в статьях [34,35]. К сожалению, анализ асимптотического решения в [34] проведен для уравнения Лапласовского роста в отсутствие шума, что физически бессмысленно. Для асимптотического решения с шумом и регуляризацией (путем отбрасыванием сингулярных и нефизических решений) результаты [34] скорее подтверждают выводы этой статьи и могут служить первым шагом в их математической формализации.

4 Выводы

Аналитическое полюсное решение для Лапласового роста иногда дает сингулярности, возникающие за конечное время. Однако, существует красивое решение этой проблемы. Во-первых, мы вводим в систему некоторый небольшой шум. Этот шум может считаться потоком полюсов из бесконечности. Во-вторых, для регуляризации проблемы мы отбросим все новые полюса, которые могут создать сингулярности, возникающие за конечное время. Можно строго доказать, что асимптотическим решением для такой системы будет единственный «палец». Более того, качественное рассмотрение показывает, что палец с шириной $1/2$ канала является статистически стабильным. Соответственно, все свойства такого решения являются совершенно такими же, что и

свойства решения с малым ненулевым поверхностным натяжением при наличии численного шума.

Удивительно, что иная проблема, описывающая распространение фронта пламени горения в смеси газов (несмотря на абсолютно разные физические и математические уравнения для этих двух случаев) имеет также аналитические полюсные решения и демонстрирует качественно похожее поведение [12 - 18].

Приложение А

Нам нужно доказать, что $\tau \mapsto \infty$, если $t \mapsto \infty$ при условии, что за конечное время не возникает сингулярность. Формула для τ будет следующей:

$$\tau = t + [-12 \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \overline{\alpha_k \alpha_l} \log(1 - \overline{a_k a_l})] + C_0, \quad (62)$$

где $|a_l| < 1$ для всех l .

Докажем, что второй член в этой формуле больше нуля:

$$\begin{aligned} -12 \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \overline{\alpha_k \alpha_l} \log(1 - \overline{a_k a_l}) &= -12 \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \overline{\alpha_k \alpha_l} \sum_{n=1}^{\infty} (-\overline{a_k a_l})^n n = 12 \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\sum_{k=1}^N \overline{\alpha_k (a_k)^n} \right) \left(\sum_{l=1}^N \alpha_l (a_l)^n \right) = \\ &= 12 \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\sum_{l=1}^N \overline{\alpha_l (a_l)^n} \right) \left(\sum_{l=1}^N \alpha_l (a_l)^n \right) > 0 \end{aligned} \quad (63)$$

Итак, второй член в ур. (62) всегда больше нуля и, соответственно, $\tau \mapsto \infty$, если $t \mapsto \infty$ при условии, что за конечное время не возникает сингулярность.

Благодарность

Автор хотел бы поблагодарить Марка Минеева-Вайнштейна и Смирнову Николаю Николаевичу за их многочисленные и плодотворные идеи, которые были крайне полезны при написании этой статьи.

Литература

- [1] **Pelce P.** Dynamics of Curved Fronts. - Boston: Academic press, 1988.
- [2] **Aldushin A.P., Matkowsky B.J.** Instabilities, Fingering and the Saffman - Taylor Problem in Filtration Combustion // Combust. Sci. and Tech. – 1998. - V. 133. – P. 293-341.

- [3] **Aldushin A.P., Matkowsky B.J.** Selection in the Saffman-Taylor Finger Problem and the Taylor-Saffman Bubble Problem Without Surface Tension // *Appl. Math. Lett.* – 1998. - V. 11, N 6. - P. 57-62.
- [4] **Aldushin A.P., Matkowsky B.J.** Extremum principles for selection in the Saffman–Taylor finger and Taylor–Saffman bubble problems // *Phys. Fluids.* – 1999. - V. 11, N 6. - P. 1287-1296.
- [5] **Chapman S.J.** On the role of Stokes lines in the selection of Saffman-Taylor fingers with small surface tension // *Eur. J. Appl. Math.* – 1999. - V. 10, N 6. - P. 513-534.
- [6] **Combescot R., Dombre T., Hakim V., Pomeau Y.** Shape selection of Saffman-Taylor fingers // *Phys. Rev. Lett.* – 1986. - V. 56, N19.- P. 2036–2039.
- [7] **Combescot R., Hakim V., Dombre T., Pomeau Y., Pumir A.** Analytic theory of the Saffman-Taylor fingers // *Phys. Rev. A* – 1988. - V.37, N 4. - P. 1270–1283.
- [8] **Hong D.C., Langer J.S.** Analytic theory of the selection mechanism in the Saffman- Taylor problem // *Phys. Rev. Lett.* – 1986. - V.56. - P. 2032–2035.
- [9] **Shraiman B.I.** Velocity selection and the Saffman-Taylor problem // *Phys. Rev. Lett.* – 1986. - V.56. - P. 2028–2031.
- [10] **Chapman S.J., King J. R.** The selection of Saffman-Taylor fingers by kinetic undercooling // *Journal of Engineering Mathematics* –2003. - V.46, N 1 - P. 1-32.
- [11] **Tanveer S.** Surprises in viscous fingering // *J. Fluid Mech.* –2000. - V.409. - P. 273–308.
- [12] **Olami Z., Galanti B., Kupervasser O. and Procaccia I.** Random Noise and Pole-Dynamics in Unstable Front Propagation // *Phys. Rev. E.* –1997. - V.55, N 3 - P. 2649-2663.
- [13] **Kupervasser O., Olami Z. and Procaccia I.** Stability Analysis of Flame Fronts: Dynamical Systems Approach in the Complex Plane // *Phys. Rev. E* –1999. - V.59, N 3 - P. 2587-2593.
- [14] **Kupervasser O., Olami Z. and Procaccia I.** Geometry of Developing Flame Fronts:Analysis with Pole Decomposition // *Phys. Rev. Lett.* –1996. - V.76. - P. 146-149.
- [15] **Galanti B., Kupervasser O., Olami Z. and Procaccia I.** Dynamics and Wrinkling of Radially Propagation Fronts Inferred from Scaling Law in Channel Geometries *Phys. Rev. Lett.* –1998. - V.80, N 11. - P. 2477-2480.
- [16] **Kupervasser O., Olami Z.** Random Noise and Pole-Dynamics in Unstable Front Propagation II, "Combustion, Explosion, and Shock Waves" -2013.- Vol. 49, N 2
- [17] **Thual O., Frisch U., and Henon M.** Application of Pole Decomposition to an Equation Governing the Dynamics of Wrinkled Flame Fronts // *J. Physique* –1985. - V.46. - P. 1485–1494
- [18] **Joulin G.** On the Hydrodynamic Stability of Curved Premixed Flames // *J. Phys. France* –1989. - V.50. - P. 1069–1082.

- [19] **Smirnov N.N., Nikitin V.F., Maximenko A., Thiercelin M., Legros J.C.** Instability and mixing flux in frontal displacement of viscous fluids from porous media // *Physics of Fluids* – 2005. -V.17.- P. 084102.
- [20] **Dushin, V.R., Nikitin, V.F., Philippov, Yu.G., Smirnov, N.N.** Two phase flows in porous media under microgravity conditions // *Microgravity Science and Technology*-2008.-V. 20, N 3-4.- P. 155-160.
- [21] **Smirnov N.N., Nikitin V.F., Dushin V.R., Maximenko A., Thiercelin M., Legros J.C.** Instability in displacement of viscous fluids from porous specimens // *Acta Astronautica*-2007.- V. 61, N 7-8.- P. 637-643.
- Change numeration
- [22] **Abanova Ar., Mineev-Weinstein M., Zabrodinc A.** Multi-cut solutions of Laplacian growth // *Physica D: Nonlinear Phenomena* – 2009 - V. 238 (17) – P.1787–1796
- [23] **Mineev-Weinstein M., Kupervasser O.** Formation of a Single Saffman-Taylor Finger after Fingers Competition An Exact Result in the Absence of Surface Tension // On 82nd Statistical Mechanics Meeting, Rutgers University. - 1999 December 10-12; the annotation is published in *Journal of Statistical Physics* – 2000. - V.99, N3-4. - P. 1057-1065, <http://arxiv.org/abs/patt-sol/9902007>
- [24] **Feigenbaum M., Procaccia I., and Davidovich B.** Dynamics of Finger Formation in Laplacian Growth without Surface Tension// *J. Stat. Physics.* –2001. - V.103. - P. 973 -1007.
- [25] **Dawson P. S., Mineev-Weinstein M.** Long-Time Behavior of the N-finger Solution of the Laplacian Growth Equation // *Physica D.* –1994. - V.73. - P. 373-387
- [26] **Siegel M., Tanveer S.** Singular Perturbation of Smoothly Evolving Hele-Shaw Solutions // *Phys. Rev. Lett.* –1996. - V.76. - P. 419-422
- [27] **Mineev-Weinstein M.** Selection of the Saffman-Taylor Finger Width in the Absence of Surface Tension: An Exact Result // *Phys. Rev. Lett.* –1998. - V.80. - P. 2113-2116.
- [28] **Sarkissian A., Levine H.** Comment on “Selection of the Saffman-Taylor finger width in the absence of surface tension: An exact result” // *Phys. Rev. Lett.* –1998. - V.81. - P. 4528-4528.
- [29] **Mineev-Weinstein M.** A Reply to the Comment by Armand Sarkissian and Herbert Levine // *Phys. Rev. Lett.* –1998. - V.81. - P. 4529-4529
- [30] **Casademunt J., Magdaleno F. X.** Comment on “Selection of the Saffman-Taylor Finger Width in the Absence of Surface Tension:An Exact Result” // *Phys. Rev. Lett.* – 1998. - V.81. - P. 5950-5950.
- [31] **Almgren R.F.** Comment on “Selection of the Saffman-Taylor Finger Width in the Absence of Surface Tension:An Exact Result” // *Phys. Rev. Lett.* –1998. - V.81. - P. 5951-5951.
- [32] **Mineev-Weinstein M.** A Reply to the Comment by J. Casademunt and F. X. Magdaleno, and also R.F. Almgren // *Phys. Rev. Lett.* –1998. - V.81. - P. 5952-5952

- [33] **Kessler D. A., Levine H.** Microscopic Selection of Fluid Fingering Patterns // Phys. Rev. Lett. –2001. - V.86. - P. 4532-4535
- [34] **E. Paun´e, F.X. Magdaleno and J. Casademunt** Dynamical Systems approach to Saffman-Taylor fingering. A Dynamical Solvability Scenario // Physical Review E – 2002 - V. 65 (5) - P. 056213
- [35] **Mark Mineev-Weinstein, Gary D. Doolen, John E. Pearson, Silvina Ponce Dawson** Formation and Pinch-off of Viscous Droplets in the Absence of Surface Tension: an Exact Result // <http://arxiv.org/abs/patt-sol/9912006>